TITLE:
レプリカ法における解析接続について(情報物理学の数学的構造)

AUTHOR(S):
田中, 利幸

CITATION:
田中, 利幸. レプリカ法における解析接続について(情報物理学の数学的構造). 数理解析研究所講究録 2007, 1532: 118-129

ISSUE DATE:
2007-02

URL:
http://hdl.handle.net/2433/58952

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
1532 巻 2007 年 118-129

レプリカ法における解析接続について

京都大学大学院情報学研究科 田中利幸 (Toshiyuki Tanaka)
Graduate School of Informatics,
Kyoto University

1 はじめに

レプリカ法は，スピングラスの研究で重要な解析手法である．歴史的には，実在の磁性合金において観察される特異な性質を説明するために Edwards と Anderson [1] によって磁気モーメント間の相互作用にランダムさを有するような磁性体の数理モデル (EA 模型) が定式化され，その解析のためにのちにレプリカ法と称されることになる数理的な計算技法が導入された．磁気モーメント間のランダムな相互作用で特徴づけられる統計力学の研究対象はスピングラスと呼ばれ，スピングラスの性質を理論的に探究する強力な解析手法としてレプリカ法が広く使われるようになっていった．レプリカ法による解析の結果が示唆するスピングラスの物理については多くの考察がなされており，スピングラスの研究者のあいだでは，レプリカ法は物理的に妥当な解を与える解析手法として広く受け入れられているようである [2, 3].

レプリカ法が適用可能な対象は，磁性体の数理モデルに限られるわけではない．磁性体のモデルではない対象へのレプリカ法の初期の適用例としては，ニューラルネットワークの連想記憶モデルに対してレプリカ法を適用して記憶容量を評価した研究 [4] を挙げることができる．また，統計的学習の基本的な数理モデルのひとつであるパーセプトロンの解析にレプリカ法を適用した研究 [5] も，重要なもののひとつである．とくに後者では，磁性体の数理モデルとの類比を経由せずに統計的学習理論の立場で意味のある量を直接評価しようというきわめて斬新な方法論的意識を垣間見ることができて興味深い．このような研究成果が蓄積されていくにつれて，レプリカ法を磁性体の数理モデル以外の対象に適用しようという試みが次第に多くなされるようになってきた．具体的な適用例については，成書 [6, 7, 8, 9, 10] 等を参照されたい．

こうして，レプリカ法は統計力学だけでなく情報数理分野の広範な問題群に適用され，多くの成果を生み出してきた．その一方で，解析手法としてのレプリカ法の妥当性は確立されているわけではない．そのため，数学的厳密性を尊重する立場に立つならば，レプリカ法によって得られた成果の正当性については留保を付さざるを得ないことになる．もちろん，これまでの適用例について，数値シミュレーションによってレプリカ解析結果の数値的な妥当性が検証されているものは少なくない．また，少数の例に関しては，レプリカ解析の結果を参考にしつつレプリカ法を使わない厳密なアプローチによってレプリカ解析の結果が再現されている [11]．これらの状況証拠から，レプリカ法は経験的には多くの場合に正しい結果を与えると期待されているが，その一方で，レプリカ法の数学的な解析手法としての一般的な妥当性がいえるのかいえないのか，いえるとしても何

らかの条件を付加する必要があるのか，あるいはレプリカ法の妥当性を一般的に示すことはできず，単に正しそうな解をみつけるための発見的な便法という位置づけにとどまるのか，ということが重要な問題として提起される．

本稿は，レプリカ法の妥当性に関する議論について，統計力学の分野で既に知られている事項を整理して提示することを目的としている．レプリカ法の適用範囲が統計力学にとどまらず多様な学問分野に拡大していくにつれ，少からぬ研究者の方からレプリカ法の妥当性について素朴な，あるいは強い懐疑を伴った質問を受ける機会が増えてきている．そこで，この機会にレプリカ法の妥当性に関わる重要な論点を簡潔にまとめておくと何かと役に立つのではないかと考えた．

2 レプリカ法

正の実数値をとる確率変数 Z を考え，$\log Z$ の期待値を求める問題を議論する．Z が従う確率分布が解析的な形で与えられており，それにもとづいて $\log Z$ の期待値を解析的に評価したい，という状況を想定するものとする．直接の計算により $\log Z$ の期待値が容易に求められるのであればそうすればよいから，直接計算が簡単でないような場合を想定する．

レプリカ法は，$\log Z$ の期待値を

$$\mathbb{E}(\log Z) = \lim_{n\to 0} \frac{\partial}{\partial n} \log \mathbb{E}(Z^n) \tag{1}$$

によって評価する．右辺の n に関する微分を

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \log \mathbb{E}(Z^n) &= \frac{1}{\mathbb{E}(Z^n)} \frac{\partial\, \mathbb{E}(Z^n)}{\partial n} \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}(Z^n)}\, \mathbb{E}(Z^n \log Z) \end{aligned} \tag{2}$$

と計算すると，これが $n \to 0$ の極限で $\mathbb{E}(\log Z)$ に等しくなることが直ちにわかる．$\mathbb{E}(\log Z)$ の計算よりも $\mathbb{E}(Z^n)$ の計算が容易であれば，レプリカ法の処方せんに従うことで $\mathbb{E}(\log Z)$ の評価を簡略に行うことができる．

$\log Z$ の期待値を評価することは，応用上様々な分野で重要である．例えば，スピングラス理論の文脈では，

$$Z = \sum_S e^{-\beta \mathcal{H}(S|J)} \quad (\beta > 0) \tag{3}$$

によって定義される Z を考えることが重要である．対象とする統計力学的な系の，S を微視的状態変数，$\mathcal{H}(S|J)$ をハミルトニアンとし，β を逆温度としたとき，Z はこの系の分配関数である．スピングラス理論では，系のハミルトニアンが確率変数 J で特徴づけられるランダムさをもつような状況を議論する．このような状況のもとでは，分配関数 Z は J の関数であるから Z 自体も確率変数となる．$\log Z$ は自由エネルギーと呼ばれ，系が熱平衡にあるときの系の巨視的な状態に関する多くの情報を自由エネルギーから引き出すことができる．上述のような状況で J のランダムさに関する平均を考える場合には，自由エネルギー $\log Z$ の J に関する期待値を評価する必要がある．

多くの場合，レプリカ法では

1. まず n を自然数とみなして $\log \mathbb{E}(Z^n)$ を評価する.

2. つぎに n を実数とみなして n に関する微分および極限 $n \to 0$ を評価する.

という手順を踏む. 上述の例では, n が自然数であれば, Z^n は J の同一の実現値によって与えられる系を n 個「複製」したものの分配関数として明示的に書き下すことができるので, $\mathbb{E}(Z^n)$ を評価するための具体的な計算を進めることができる. 逆に, 自然数でない n に対しては $\mathbb{E}(Z^n)$ を解析的に評価する手段を見つけられないことが多く, そのような場合には手順 1 において n を自然数とする仮定が必要となる. 一方, 式 (1) の右辺を評価するために, 手順 2 において n が実数であることを仮定する必要があるのは明らかである. 問題は, 手順 1 と 2 とで n に関する仮定が互いに矛盾しているところにある. この手順が数学的にどの程度正当化できるのかを議論するのが, 本稿の目的である.

論点を整理するために, まずは素朴に考えてみよう. すべての自然数 n に対して $\mathbb{E}(Z^n)$ を評価することは, 確率変数 Z のすべての次数のモーメントを知ることに相当するから, Z の分布に関する情報はすべてわかり, したがって $\mathbb{E}(\log Z)$ が評価できたとしても不思議ではないのではないか, という議論がある. また, 正値をとる確率変数 Z に対して, $X = \log Z$ によって新たな確率変数 X を定義すると, いま, 求めるべき量は $\mathbb{E}(\log Z) = \mathbb{E}(X)$ である. 一方で, レプリカ法によって実際に評価する量は

$$\mathbb{E}(Z^n) = \mathbb{E}(e^{nX}) \tag{4}$$

である. これを n の関数とみて $\varphi(n)$ とおく. $\varphi(n)$ は Z の n 次モーメントであるが, 見方を変えれば X のモーメント母関数でもある. 後者の立場に立てば, レプリカ法は X のモーメント母関数 $\varphi(n)$ を n の自然数値だけで評価し, その結果から期待値 $\mathbb{E}(X)$ を評価しているのだと解釈することもできる.

以上の観察にもとづいて, 検討されるべき問題を以下の 3 つに整理することができる.

問題 1 Z のモーメント系列 $\{\varphi(n) | n = 1, 2, \ldots\}$ は Z の分布を一意に定めるか?

問題 2 Z のモーメント系列 $\{\varphi(n) | n = 1, 2, \ldots\}$ を与える表式 $\varphi(n)$ は $X = \log Z$ のモーメント母関数を与えているか?

問題 3 与えられたモーメント母関数は原点付近で解析的か?

3 つの問題に対する答がすべて肯定的であれば, レプリカ法が $\mathbb{E}(\log Z)$ の正しい値を与えることが保証される. 第 3 節において, これらの問題のそれぞれについて検討を加える. なお, スピングラス理論を含むレプリカ法の大多数の適用例においては, レプリカ法は「熱力学的極限」すなわち対象とする系の「サイズ」を無限大とする極限を考えるような状況で使われる. このような場合には, レプリカ法と「熱力学的極限」との兼ね合いによって上述の 3 つの問題とは異なる新たな問題が生じる. これについては第 4 節で議論する.

3 熱力学的極限を考えない場合についての議論

3.1 問題 1

問題 1 は「モーメント問題」として知られている[1].

Z の値域が有界であれば，Z の分布はそのモーメント系列から一意に定められることが知られている (Hausdorff のモーメント問題) [12]. いっぽう，Z の値域が有界でない場合には反例がある.

Heyde の反例 [13] 対数正規分布

$$p(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{z\sqrt{2\pi}} e^{-(\log z)^2/2} & (z > 0) \\ 0 & (z \leq 0) \end{cases} \tag{5}$$

に対し，a ($|a| \leq 1$) をパラメータとする分布の 1 パラメータ族

$$\{p_a(z) = p(z)\left[1 + a\sin(2\pi \log z)\right]\} \tag{6}$$

を考える. 分布 $p_a(z)$ のモーメント系列は a の値によらず同一である.

Stieltjes-Hamburger の反例 [14] $0 < \alpha < 1/2$ とする. 分布

$$p(z) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\Gamma(\alpha^{-1})} e^{-z^\alpha} & (z > 0) \\ 0 & (z \leq 0) \end{cases} \tag{7}$$

に対し，a ($|a| \leq 1$) をパラメータとする分布の 1 パラメータ族

$$p_a(z) = p(z)\left[1 + a\sin(z^\alpha \tan(\alpha\pi))\right] \tag{8}$$

を考える. 分布 $p_a(z)$ のモーメント系列は a の値によらず同一である.

2-スピンランダムイジング模型 確率変数 J にもとづいて確率変数 Z を

$$Z = \sum_{(s_1, s_2)\in\{-1,1\}^2} e^{J s_1 s_2} \tag{9}$$

によって定義する. これは，ランダムなスピン間相互作用 J をもつ 2-スピンランダムイジング模型の分配関数であるとみなすことができる. J が，a ($|a| \leq 1$) をパラメータとする分布の 1 パラメータ族

$$p_a(j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(j-\mu)^2}{2\sigma^2}} \left[1 + a\sin\frac{2\pi(j-\mu)}{\sigma^2}\right] \tag{10}$$

に従うものとすると，Z のモーメント系列は a の値によらない.

モーメント系列が Z の分布を一意に定めるための十分条件はいくつか知られているが，下記の Carleman の十分条件 [12] はそのなかのひとつである.

[1] 一般には,「モーメント問題」というときには確率測度の「存在」と「一意性」との両方が問題となる.「存在」の問題，すなわち，与えられた実数値系列 $\{s_n | n = 1, 2, \ldots\}$ をモーメント系列としてもつ確率測度が存在するために実数値系列がみたすべき条件を求める問題を指して「モーメント問題」と呼ぶこともある. 本稿で問題にするのは「存在」が担保された条件のもとでの「一意性」の問題である.

Carleman の十分条件　確率変数 Z が条件

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathbb{E}(Z^{2n})\right]^{-1/(2n)}=\infty \tag{11}$$

をみたせば，Z の分布はそのモーメント系列から一意に定まる．

Heyde の反例に関しては $\mathbb{E}(Z^n)=e^{n^2/2}$ であるので，Carleman の十分条件をみたしていない．また Z が分布 $p_a(\cdot)$ に従うとき $X=\log Z$ のモーメント母関数 $\varphi_a(s)=\mathbb{E}_{p_a}(e^{sX})$ は

$$\varphi_a(s)=e^{s^2/2}\big(1+a\,e^{-2\pi^2}\sin 2\pi s\big) \tag{12}$$

であるから，

$$\mathbb{E}(X)=\varphi'(0)=2\pi a\,e^{-2\pi^2} \tag{13}$$

であり，結果が a に依存することがわかる．

Stieltjes-Hamburger の反例については，$\mathbb{E}(Z^n)=\Gamma\big((n+1)/\alpha\big)\;/\;\Gamma(1/\alpha)$ であり，やはり Carleman の十分条件を満足していないことがわかる．また，Z が分布 $p_a(\cdot)$ に従うときの $X=\log Z$ のモーメント母関数 $\varphi_a(s)=\mathbb{E}_{p_a}(e^{sX})$ は

$$\varphi_a(s)=\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}\big(1-a\cos^{(s+1)/\alpha}\alpha\pi\,\sin s\pi\big) \tag{14}$$

であり，$\mathbb{E}(X)$ は

$$\mathbb{E}(X)=\varphi'(0)=\frac{\psi\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha}-a\pi\cos^{1/\alpha}\alpha\pi \tag{15}$$

と計算される．ただし，$\psi(x)$ は digamma 関数である．この場合も結果はやはり a に依存する．

2-スピンランダムイジング模型の場合について $\mathbb{E}(Z^n)$ を具体的に計算すると

$$\mathbb{E}(Z^n)=2^n\sum_{i=0}^{n}{}_nC_i e^{(n-2i)\mu+(n-2i)^2\sigma^2/2}=2^n\sum_{i=0}^{n}{}_nC_i e^{(n-2i)^2\sigma^2/2}\cosh(n-2i)\mu \tag{16}$$

となり a に依存しないことがわかる．また，$\mathbb{E}(Z^n)>2^n e^{n^2\sigma^2/2}$ が成り立つので，Z のモーメント系列は Carleman の十分条件をみたしていないこともわかる．$X=\log Z$ のモーメント母関数 $\varphi_a(s)=\mathbb{E}_{p_a}(e^{sX})=\mathbb{E}(Z^s)$ は

$$\varphi_a(s)=4^s\int_{-\infty}^{\infty}\cosh^s(\mu+\sigma z)\left(1+a\sin\frac{2\pi z}{\sigma}\right)Dz,\quad Dz=\frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dz \tag{17}$$

で与えられ，

$$\mathbb{E}(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\log\cosh(\mu+\sigma z)\left(1+a\sin\frac{2\pi z}{\sigma}\right)Dz+\log 4 \tag{18}$$

は $\mu\neq 0$ であれば a に依存する．

以上の計算から，Heyde の反例，Stieltjes-Hamburger の反例，および 2-スピンランダムイジング模型の例は，Z と Z' とが同一のモーメント系列をもちながら $\mathbb{E}(\log Z)\neq$

$\mathbb{E}(\log Z')$ となる場合があることを，それぞれ具体的に示しているのだということができる．

スピングラス理論の分野で標準的な模型に Sherrington-Kirkpatrick (SK) 模型 [15] がある．N 個の磁気モーメントからなる SK 模型の分配関数を Z_N とすると，$k>0$ を N, n によらない定数として $\mathbb{E}(Z_N^n) = O(e^{Nk(\mathrm{Re}\,n)^2})$ であり，したがって，SK 模型の分配関数も Carleman の十分条件を満足しないことが知られている [16].

なお，$s=0$ を含むある区間 $(-s_0, s_0)$ において Z のモーメント母関数が存在すれば Z の分布はそのモーメント系列から一意に定まることがいえる．しかし，Z のモーメント母関数が存在するという条件はたいへん強い条件である．例えば Carleman の十分条件よりもはるかに強い．

モーメント問題に関して，本稿では Carleman の十分条件だけを議論したが，今日ではそれ以外にも非常に多くのことがわかっている．詳細は成書 [17, 18] を，また多変数確率分布に関するモーメント問題については Fuglede [19] をそれぞれ参照していただきたい．

3.2 問題 3

モーメント母関数が存在するとき，そのモーメント母関数は原点で解析的であることが知られている．

モーメント母関数 $\varphi(s)$ が解析的であれば，以下の性質をもつ [20].

1. $\varphi(s)$ は複素平面内の虚軸に平行な帯状領域 $-\alpha < \mathrm{Re}\,s < \beta$ $(\alpha > 0,\ \beta > 0)$ において正則である．

2. 原点にもっとも近い $\varphi(s)$ の極は実軸上にある．

3. $-\alpha < u < \beta$ をみたす実数 u に対して

$$\sup_{v\in\mathbb{R}} \left|\varphi(u+iv)\right| \le \varphi(u) \tag{19}$$

が成り立つ．

この事実の簡単な適用例を以下に示す．$\varphi(s)$ をモーメント母関数とする．

$$\tilde{\varphi}(s) = \varphi(s) + a\sin 2\pi s \tag{20}$$

とおくと，s のすべての整数値に対して $\tilde{\varphi}(s) = \varphi(s)$ となるが，$\tilde{\varphi}'(0) \neq \varphi'(0)$ である．以上の素朴な議論は，レプリカ法に対する反例を構成しない．なぜなら，$\tilde{\varphi}(s)$ は式 (19) の条件をみたさず，したがっていかなる確率分布のモーメント母関数ともなり得ないからである．

3.3 問題 2

Z のモーメント系列 $\{\varphi(n)|n=1,2,\ldots\}$ が n の解析的な式によって与えられたとき，同じ表式が自然数でない n に対しても $X=\log Z$ のモーメント母関数を与えていることを期待したくなる．モーメント母関数が正の実軸を含むある領域で解析的であることを仮定すると，ここでの「期待」は複素関数論における「解析接続」に類似している．両者の相違点は，我々の議論においては点列 $n=1,2,\ldots$ が集積点をもたないことである．したがっていわゆる「一致の定理」はここでは適用することができない．

我々が問題としているような状況において「解析接続」の一意性を保証するための十分条件としては，Carlson の定理 [21] が知られている．なお，以下に示すのは Carlson の定理そのものではなく，モーメント母関数 $\varphi(s)$ が条件 (19) をみたすという事実を利用することで定理の主張を若干強めたものである[2]．

Carlson の定理 (あるいは Phragmén-Lindelöf の定理の系) モーメント母関数 $\varphi(s)$ が右半面で解析的で，s によらない定数 $k>0$ に対して $\varphi(s)=O(e^{k\mathrm{Re}\,s})$ であるものとすると，$\varphi(s)$ は $s=0,1,2,\ldots$ での値から一意に定まる．

$\varphi(s)$ を Z のモーメント系列とみなすと，条件 $\varphi(s)=O(e^{k\mathrm{Re}\,s})$ $(k>0)$ は，与えられたモーメント系列をもつ Z の分布の一意性を保証する十分条件でもある．一方で，第3.1節で示した Heyde の反例，Stieltjes-Hamburger の反例，2-スピンランダムイジング模型の例は，ある解析関数 $\varphi(s)$ が s の自然数値に対して Z のモーメント系列を正しく与え，かつ，ある確率変数 X のモーメント母関数でもある，ということが成り立つ場合であっても，$X=\log Z$ であるとは限らず，したがって $\varphi'(0)$ が正しく $\mathbb{E}(\log Z)$ を与えない場合があることを示している．さらに，SK 模型に対しては $\varphi(s)=O(e^{Nk(\mathrm{Re}\,s)^2})$ であるから，Carlson の定理によって $\varphi(s)$ に関する「解析接続」の一意性を保証することはできない [16]．

4 熱力学的極限

4.1 何が問題なのか

正の実数値をとる確率変数の列 $\{Z_N|N=1,2,\ldots\}$ に対し，極限

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\,\mathbb{E}(\log Z_N) \tag{21}$$

が存在するものとしてこの極限を求める問題を考える．この種の問題は，スピングラス理論において熱力学的極限での系の自由エネルギーを評価しようとしたときに自然に現れるものである．すなわち，系を構成する磁気モーメントの個数が N である場合の系の分

[2]具体的には，式 (19) を利用することで [21] で要請されている条件「$k<\pi$」が我々の場合には不要となる．

配関数を Z_N としたとき，式 (21) は，相互作用のランダムさに関する系の平均自由エネルギーを熱力学的極限 $N \to \infty$ において評価することに対応する．レプリカ法を使うと，

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\mathbb{E}(\log Z_N) &= \lim_{N\to\infty}\lim_{n\to 0}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{N}\log\mathbb{E}(Z_N^n)\\ &= \lim_{n\to 0}\frac{\partial}{\partial n}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log\mathbb{E}(Z_N^n)\end{aligned} \tag{22}$$

という式変形を利用して式 (21) の極限を評価することになる．ここでの問題は，式 (22) の第二辺から第三辺へ移る際の式変形で，N に関する極限操作と n に関する微分および極限操作との順番を入れ換えているが，この手続きが数学的に大丈夫かどうか，ということである．

4.2 van Hemmen と Palmer の議論

4.2.1 定式化

上述の問題に対して van Hemmen と Palmer [16] が詳細な議論を行っている．本節では彼らの議論の概略を述べる．

関数 $\varphi_N(n)$ および $f_N(n)$ をそれぞれ

$$\varphi_N(n) = \left[\mathbb{E}(Z_N^n)\right]^{1/N} \tag{23}$$

および

$$f_N(n) = \log\varphi_N(n) \tag{24}$$

によって定義する．上述の問題は以下のように表される [16]．

極限 $\lim_{N\to\infty} f_N(n) = f(n)$ が存在し，$\lim_{N\to\infty} f'_N(0) = f'(0)$ が成り立つか?

ほんとうに求めたい量は $\lim_{N\to\infty} f'_N(0)$ であり，レプリカ法では代わりに $f'(0)$ を評価することでこれを求めようというのである．van Hemmen と Palmer は，関数 $f_N(n)$ の解析性，もしくは凸性が，この問題を検討するための有力な手がかりになり得るとして議論を進めている．それぞれの議論について次節以降で紹介する．

4.2.2 解析性

実際には，関数 $f_N(n)$ の解析性は我々の目的にはあまり役に立たない．第 3.3 節で既に見たように，関数 $f_N(n)$ の解析性を頼りにして $f_N(n)$ の定義域を自然数から実数あるいは複素数へ一意に拡張することがそもそも難しいのである．さらに，仮に一意の拡張ができたとしても，$\mathbb{E}(Z_N^n)$ の零点 ($f_N(n) = (1/N)\log\mathbb{E}(Z_N^n)$ の真性特異点) が極限 $N \to \infty$ で実軸に漸近するようなことがあったりすると，極限 $f(n) = \lim_{N\to\infty} f_N(n)$ は零点が漸近する n の値で解析性を失う可能性がある．そのような場合には，$f'(0)$ が $\lim_{N\to\infty} f'_N(0)$ と等しくなることは一般には期待できない．

4.2.3 凸性

$n \in \mathbb{R}$ に対して $f_N(n)$ は凸である ([22] の定理 197). また, 極限 $\lim_{N\to\infty} f_N(n) = f(n)$ が存在すれば, $f(n)$ は凸であり,

$$\lim_{N\to\infty} f'_N(n) = f'(n) \tag{25}$$

が $f'(n)$ のすべての連続点で成り立つ [23]. さらに, 極限 $f(n)$ の存在をいうためには, N によらない $f_N(n)$ の上下界があることを示せばよい. van Hemmen と Palmer は, SK 模型に関して関数 $f_N(n)$ の上下界を具体的に提示することによって極限 $f(n)$ の存在を示し, さらに $n = 0$ が $f'(n)$ の連続点であれば $\lim_{N\to\infty} f'_N(0) = f'(0)$ が成立することを示した.

凸性を利用することで問題が一気に解決したかのように見えるかもしれないが, 実際にはそうではない. $f_N(n)$ が n の関数として解析的であったとしても, $f(n)$ もそうだとは限らないからである. レプリカ法では n の自然数値に対して $f(n)$ を計算する. 結果が n について解析的な表式によって与えられたとしても, その表式が自然数でない n に対して成り立つかどうかはやはりわからない (**問題 2**) のである.

4.3 Ogure と Kabashima の解析

Ogure と Kabashima [24] は, 大正準離散ランダムエネルギー模型 (GC-DREM) という模型の分配関数 Z_N に対して, レプリカ法によらずに解析的に $f(n) = \lim_{N\to\infty} f_N(n)$ を評価する枠組を議論し, レプリカ法による解析結果との比較を行っている. 模型や解析の詳細については原論文 [24] を参照していただくこととして, 本稿では省略する. 彼らは, GC-DREM に対して $f(n)$ はある $n_c \in (0, 1)$ で解析的でなくなる場合があることを示した. この結果は,「極限 $f(n) = \lim_{N\to\infty} f_N(n)$ が n の関数として解析的である」という期待に対する具体的な反例を与えていると解釈することができる. しかも,「人為的」に構築された反例ではなく, GC-DREM という, 統計力学的に決して不自然でない模型の分配関数から定義される $f_N(n)$ にもとづくものである点が重要である.

Z_N の任意の次数のモーメント $\mathbb{E}(Z_N^n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ が存在するものとすると, $|n| < \infty$ である任意の $n \in \mathbb{C}$ に対して $\varphi_N(n)$ は有界であるから, $f_N(n)$ の解析性が $N \to \infty$ の極限で複素平面の実軸上の点 n_c において失われるときには, $\varphi_N(n)$ の複素零点が $N \to \infty$ の極限で n_c に漸近しているものと予想される. Ogure と Kabashima [25] は, GC-DREM に関して $\mathbb{E}(Z_N^n) = \varphi_N(n)^N$ の零点を数値的に評価し, 零点が n_c に近づいていく様子を捉えている.

5 おわりに

本稿では, レプリカ法の数学的な妥当性について, これまで知られていることをまとめた. レプリカ法では, 確率変数 Z について $\mathbb{E}(\log Z)$ を求めるために, 自然数 n に対して $\varphi(n) = \mathbb{E}(Z^n)$ を評価し, その結果を実数もしくは複素数の n に拡張するが, 関数 $\varphi(n)$ の定義域を自然数から実数もしくは複素数に拡張する際に, その拡張が一意である

ことは一般には保証できない．また，個別の具体的な適用例について拡張の一意性を保証するのも容易ではない．さらに，熱力学的極限と組み合わせてレプリカ法が適用されるようなケースでは，熱力学的極限 $N \to \infty$ において関数 $f_N(n) = \log \varphi_N(n)$ の解析性が失われる場合があり，そのような場合には n の自然数値に対する $f(n) = \lim_{N\to\infty} f_N(n)$ の解析的な表式から $n = 0$ 近傍での $f(n)$ の様子を特定することはできない．以上の結果から，レプリカ法の処方せんを一般的な条件のもとで正当化することは困難であろうと予想される．

Talagrand は自らの著書のなかでこう書いている．

> At the present time, it is difficult to see in the physicist's replica method more than a way to guess the correct formula. Moreover, the search for arguments making this method legitimate "a priori" does not look to this author as a promising area of investigation. ([11], p. 195)

Talagrand は，レプリカ法によって得られた結果はともかくとして，解析手法としてのレプリカ法それ自体については現時点では明確に否定的である．一方で，レプリカ法を適用することでこれまでに多様な問題に対して数多くの結果が得られているという事実(そのうちの多くは非自明であるだけでなく深い考察に値する豊かな構造を有している)からは，何らかの形でレプリカ法の妥当性を支持するような比較的一般性のある結果が得られることを期待したくなる．歴史を振り返ると，最初は発見的に提案された概念に対して後から数学的理論が整備されたという例は決して珍しくない[3]．レプリカ法に関してはどうであろうか．今後の研究の進展に期待したい．

謝辞

本稿は，2006 年 6 月に開催された京都大学数理解析研究所共同利用研究集会「情報物理学の数学的構造」における著者の講演内容にもとづいている．同研究集会における講演の機会を与えていただいた渡辺澄夫氏 (東京工業大学) に深く感謝する．著者が本稿にまとめられた研究に着手するに至ったのは，村松純氏 (NTT コミュニケーション科学基礎研究所)，和田山正氏 (名古屋工業大学) 両名との議論に大いに触発されたことが直接のきっかけとなっている．また，M. Putinar 氏 (カリフォルニア大学サンタバーバラ校) には，モーメント問題に関する最近の研究の進展についてご教示いただいた．ここに記して謝意を表する．本研究の一部は，文部科学省科学研究費補助金特定領域研究「情報統計力学の深化と展開」(課題番号 18079010) の援助を受けて行われた．

[3]デルタ関数，Heaviside の演算子法，ウェーブレットなどを挙げることができよう．

参考文献

[1] S. F. Edwards and P. W. Anderson, "Theory of spin glasses," *J. Phys. F: Metal Phys.*, vol. 5, pp. 965–974, May 1975.

[2] K. H. Fischer and J. A. Hertz, *Spin Glasses*, Cambridge Univ. Press, 1991.

[3] 高山一，スピングラス，パリティ物理学コース クローズアップ，丸善，1991.

[4] D. J. Amit, H. Gutfreund, and H. Sompolinsky, "Storing infinite numbers of patterns in a spin-glass model of neural networks," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 55, no. 14, pp. 1530–1533, Sept. 1985.

[5] E. Gardner, "The space of interactions in neural network models," *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 21, pp. 257–270, 1988.

[6] 西森秀稔，スピングラス理論と情報統計力学，岩波書店，1999.

[7] 樺島祥介，学習と情報の平均場理論，岩波講座物理の世界，岩波書店，2001.

[8] A. K. Hartmann and M. Weigt, *Phase Transitions in Combinatorial Optimization Problems*, Wiley-VCH, 2005.

[9] A. C. C. Coolen, *The Mathematical Theory of Minority Games*, Oxford Univ. Press, 2005.

[10] 田中和之 (編)，確率的情報処理への統計力学的アプローチ，サイエンス社，2006.

[11] M. Talagrand, *Spin Glasses: A Challenge for Mathematicians*, Springer, 2003.

[12] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. 2, 2nd ed., John Wiley & Sons, 1966, 1971.

[13] C. C. Heyde, "On a property of the lognormal distribution," *J. Roy. Statist. Soc., Ser. B*, vol. 25, no. 2, pp. 392–393, 1963.

[14] H. Hamburger, "Beiträge zur Konvergenztheorie der Stieltjesschen Kettenbrüche," *Math. Z.*, vol. 4, nos. 3–4, pp. 186–222, Sept. 1919.

[15] D. Sherrington and S. Kirkpatrick, "Solvable model of a spin-glass," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 35, no. 26, pp. 1792–1796, Dec. 1975.

[16] J. L. van Hemmen and R. G. Palmer, "The replica method and a solvable spin glass model," *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 12, no. 4, pp. 563–580, 1979.

[17] J. A. Shohat and J. D. Tamarkin, *The Problem of Moments*, Revised ed., American Mathematical Society, 1943, 1950.

[18] N. I. Akhiezer, *The Classical Moment Problem*, Oliver & Boyd, 1965.

[19] B. Fuglede, "The multidimensional moment problem," Expo. Math., vol. 1, pp. 47–65, 1983.

[20] D. Raikov, "A theorem from the theory of the analytic characteristic functions," *Mitt. Forsch.-Inst. Math. Mech. Kujbyschew-Univ. Tomsk*, vol. 2, pp. 8–11, 1938.

[21] E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, 2nd ed., Oxford Univ. Press, 1932.

[22] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, 1952.

[23] R. B. Griffiths, "A proof that the free energy of a spin system is extensive," *J. Math. Phys.*, vol. 5, no. 9, pp. 1215–1222, 1964.

[24] K. Ogure and Y. Kabashima, "Exact analytic continuation with respect to the replica number in the discrete random energy model of finite system size," *Prog. Theor. Phys.*, vol. 111, no. 5, pp. 661–688, 2004.

[25] K. Ogure and Y. Kabashima, "An exact analytic continuation to complex replica number in the discrete random energy model of finite system size," *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, no. 157, pp. 103–106, 2005.